41628

AL/2020/10/S-I(NEW)

නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

NEW

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2020
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2020
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2020

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

පැය තුනයි
மூன்று மணித்தியாலம்
Three hours

අමතර කියවීම් කාලය	-	මිනිත්තු 10 යි
மேலதிக வாசிப்பு நேரம்	-	10 நிமிடங்கள்
Additional Reading Time	-	10 minutes

අමතර කියවීම් කාලය ප්‍රශ්න පත්‍රය කියවා ප්‍රශ්න තෝරා ගැනීමටත් පිළිතුරු ලිවීමේදී ප්‍රමුඛත්වය දෙන ප්‍රශ්න සංවිධානය කර ගැනීමටත් යොදාගන්න.

විභාග අංකය | | | | | | | |

උපදෙස්:

* මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ;
  A කොටස (ප්‍රශ්න 1 - 10) සහ **B කොටස** (ප්‍රශ්න 11 - 17).
* **A කොටස:**
  සියලු ම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති ඉඩෙහි ලියන්න. වැඩිපුර ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම්, ඔබට අමතර ලියන කඩදාසි භාවිත කළ හැකි ය.
* **B කොටස:**
  ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න. ඔබේ පිළිතුරු, සපයා ඇති කඩදාසිවල ලියන්න.
* නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු **A කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රය, **B කොටසෙහි** පිළිතුරු පත්‍රයට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ශාලාධිපතිට භාර දෙන්න.
* ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි **B කොටස පමණක්** විභාග ශාලාවෙන් පිටතට ගෙන යාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකවරුන්ගේ ප්‍රයෝජනය සඳහා පමණි.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I

කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	

එකතුව

ඉලක්කමෙන්	
අකුරින්	

සංකේත අංක

උත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක		
පරීක්ෂා කළේ:	1	
	2	
අධීක්ෂණය කළේ:		

[දෙවැනි පිටුව බලන්න.

A කොටස

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

2. එක ම රූප සටහනක $y = 3|x-1|$ හා $y = |x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1| > 2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\text{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න.

ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, n ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x} - \sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

6. $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ හා $y = 0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\frac{\pi}{4}(4\ln 2 - 1)$ බව පෙන්වන්න.

7. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ඉලිප්සයට එය මත $P\equiv(5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\, x-3\cos\theta\, y=16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.

8. $m\in\mathbb{R}$ හා l යනු $A\equiv(1,2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය m වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.
l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
$B\equiv(2,3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත.
m හි අගයන් සොයන්න.

9. කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

ඒ නයින්, A සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

10. $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

41628

නව නිර්දේශය/புதிய பாடத்திட்டம்/New Syllabus

NEW

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2020
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2020
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2020

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (*a*) $f(x) = x^2 + px + c$ හා $g(x) = 2x^2 + qx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q \in \mathbb{R}$ හා $c > 0$ වේ. $f(x) = 0$ හා $g(x) = 0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha = p - q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p > 0$ නම් $p < q < 2p$ බව,

(ii) $f(x) = 0$ හි විවේචකය $(3p - 2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x) = 0$ හි හා $g(x) = 0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta = 2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2 + 3(2p - q)x + (2p - q)^2 = 0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(*b*) $h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c \in \mathbb{R}$ වේ. $x^2 - 1$ යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b = -1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න $x^2 - 2x$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x + k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x - \lambda)^2 (x - \mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ වේ.

12. (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r - 2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(*b*) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1 - z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $1+\sqrt{3}\,i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}\,i)^m (1-\sqrt{3}\,i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

14. (*a*) $x \neq 3$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

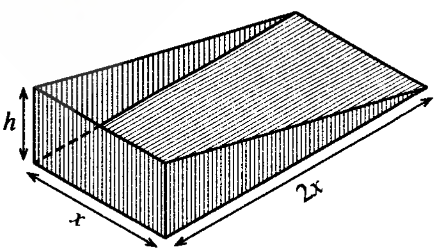
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x) = \dfrac{18x}{(x-3)^4}$ **බව දී ඇත**.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



[නවවැනි පිටුව බලන්න.

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

16. $A \equiv (1,2)$ හා $B \equiv (3,3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\frac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛාවල සමීකරණ සොයන්න.

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1+2t, 2+t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ වේ.

l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මූලමනින්ම පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන අරය $\frac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්වන්න.

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

[දහවැනි පිටුව බලන්න.

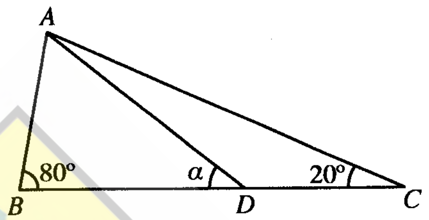
17. (a) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90^\circ-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10^\circ = \cos 20^\circ - \sqrt{3}\,\sin 20^\circ$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80^\circ$ හා $A\hat{C}B = 20^\circ$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (a)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30^\circ$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

* * *

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n}(4r+1) = n(2n+3)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ සඳහා, ව. පැ. $= 4 + 1 = 5$ හා

ද. පැ. $= 1(2+3) = 5$ වේ.

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම්, $\sum_{r=1}^{k} (4r+1) = k(2k+3)$ වේ. 5

දැන්,
$$\sum_{r=1}^{k+1} (4r+1) = \sum_{r=1}^{k} (4r+1) + \{4(k+1)+1\}$$
$$= k(2k+3) + (4k+5) \quad 5$$
$$= 2k^2 + 7k + 5$$
$$= (k+1)(2k+5) \quad 5$$
$$= (k+1)[2(k+1)+3]$$

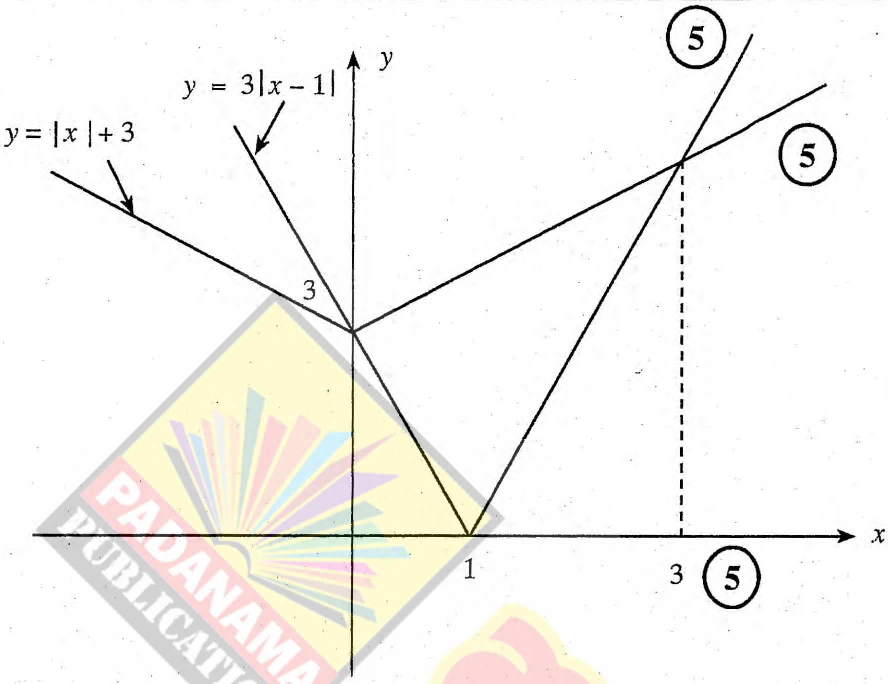
ඒ නයින්, $n = k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය නම්, $n = k+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත.

ඒ නයින්, ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

5

2. එක ම රූප සටහනක $y=3|x-1|$ හා $y=|x|+3$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

එනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $3|2x-1|>2|x|+3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.



එක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයක x – ඛණ්ඩාංකය $x = 0$ වේ. අනෙක් ඡේදන ලක්ෂ්‍යයේ x – ඛණ්ඩාංකය $x > 1$ සඳහා $3(x-1) = x+3$ මගින් දෙනු ලැබේ.

මෙය $x = 3$ ලබා දෙයි.

දැන්, $3|2x-1| > 2|x| + 3$

$\Leftrightarrow \quad 3|u-1| > |u| + 3$, මෙහි $u = 2x$. 5

$\Leftrightarrow \quad u < 0$ හෝ $u > 3$ (ප්‍රස්තාරවලට අනුව)

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$. 5

විකල්ප ක්‍රමය I :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :

$$3\,|2x-1| > 2\,|x| + 3$$

(i) අවස්ථාව $\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow 3\,(2x-1) > 2x+3$

$\Leftrightarrow 6x - 3 > 2x + 3$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{0 \leq x < \frac{1}{2}}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > 2x+3$

$\Leftrightarrow 0 > 8x$

$\Leftrightarrow 0 > x$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් නොමැත.

නිවැරදි විසඳුම් සමඟ අවස්ථා 3 ම සඳහා 10
නිවැරදි විසඳුම් සමඟ අවස්ථා 2ක් පමණක් සඳහා 5

(iii) අවස්ථාව $\boxed{x < 0}$

එවිට, $3\,|2x-1| > 2\,|x|+3 \Leftrightarrow -6x+3 > -2x+3$

$\Leftrightarrow 0 > 4x$

$\Leftrightarrow x < 0$

ඒ නයින්, මෙම අවස්ථාවේ දී විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ.

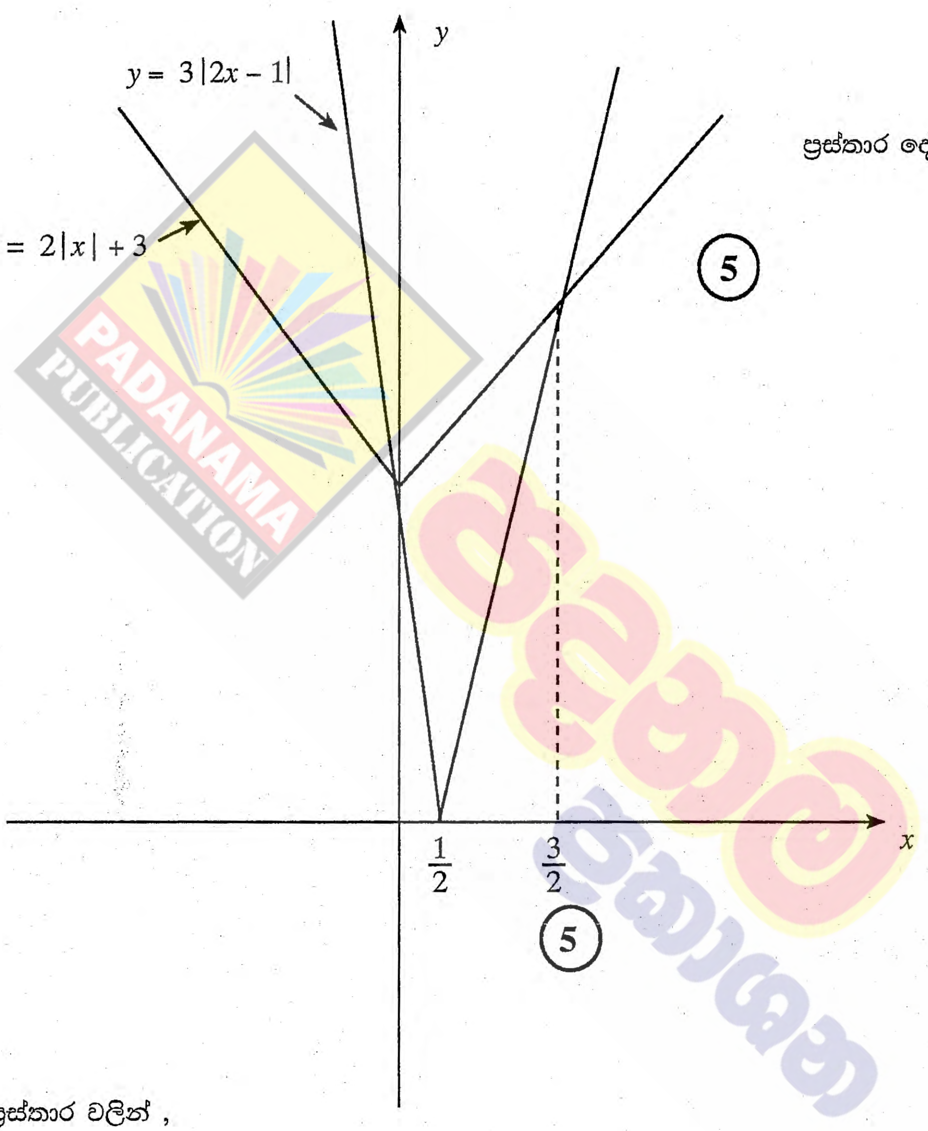
$\therefore$ දී ඇති අසමානතාවයෙහි විසඳුම් වන්නේ $x < 0$ හෝ $x > \frac{3}{2}$ තෘප්ත කරන x හි අගයන් වේ. 5

25

විකල්ප ක්‍රමය II :

පෙර පරිදිම ප්‍රස්තාර සඳහා 5 + 5 .

x හි අගයන් සඳහා විකල්ප ක්‍රමයක් :



ප්‍රස්තාර දෙකම සඳහා 5

ප්‍රස්තාර වලින් ,

$3|2x-1| > 2|x|+3$

$\Leftrightarrow \quad x < 0$ or $x > \frac{3}{2}$. 5

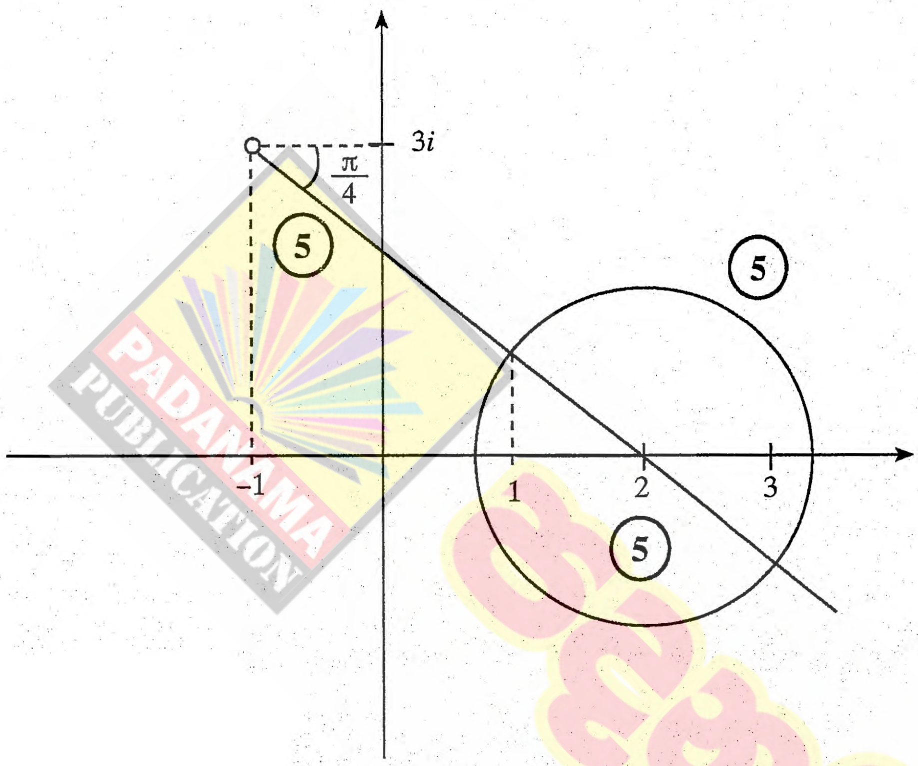
3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක,

(i) $\text{Arg}(z+1-3i) = -\frac{\pi}{4}$ හා

(ii) $|z-2| = \sqrt{2}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයන්හි දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, මෙම පථයන්හි ඡේදන ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා ලියා දක්වන්න.



අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යා $1+i$ 5 හා $3-i$ වේ. 5

4. $n \in \mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. x හි ආරෝහණ බලවලින් $(1+x)^n$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණය ලියා දක්වන්න. ඉහත ප්‍රසාරණයේ අනුයාත පද දෙකක සංගුණක සමාන නම්, n ඔත්තේ වන බව පෙන්වන්න.

$(1+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r x^r$, මෙහි ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ $r = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා

5 5

හා ${}^nC_0 = 1$.

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_r$ හා ${}^nC_{r+1}$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_r = {}^nC_{r+1}$; 5 මෙහි $r \in \{0, 1, \ldots\ n-1\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{(r+1)!\ (n-r-1)!}$ 5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-r} = \dfrac{1}{r+1}$

$\Leftrightarrow n-r = r+1$

$\Leftrightarrow n = 2r+1$. 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

වෙනත් ක්‍රමයක් :

අනුයාත පද දෙකක් ${}^nC_{r-1}$ හා ${}^nC_r$ ලෙස ගත හැක.

${}^nC_{r-1} = {}^nC_r$; 5 මෙහි $r \in \{1, 2, 3 \ldots, n\}$.

$\Leftrightarrow \dfrac{n!}{[n-(r-1)]!\,(r-1)!} = \dfrac{n!}{(n-r)!\ r!}$ 5

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{n-(r-1)} = \dfrac{1}{r}$

$\Leftrightarrow n-r+1 = r$

$\Leftrightarrow n = 2r-1$. 5

$\therefore n$ ඔත්තේ වේ.

5. $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi}\right)} = \dfrac{2\sqrt{\pi}}{3}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})} \times \frac{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})}{(\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})} \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(3x-\pi)} \cdot (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi}) \quad 5$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{3(x-\frac{\pi}{3})} \cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3x}+\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot (\sqrt{\pi}+\sqrt{\pi}) \quad 5 \quad 5$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2\sqrt{\pi} = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

විකල්ප ක්‍රමය :

$$\frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(\sqrt{3x}-\sqrt{\pi})}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})} \times \frac{(x-\frac{\pi}{3})}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{(x-\frac{\pi}{3})}\right] \cdot \left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)}\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$5 \qquad 5$$

$$= \left[\lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u}\right]\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \left(\sqrt{x}+\sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= 1 \cdot 2\sqrt{\frac{\pi}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 5$$

$$= \frac{2\sqrt{\pi}}{3} \quad 5$$

6. $y=\frac{e^x}{1+e^x}$, $x=0$, $x=\ln 3$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත වන පෙදෙස $x-$අක්ෂය වටා රේඩියන 2π වලින් භ්‍රමණය කරනු ලැබේ. මෙලෙස ජනනය වන ඝන වස්තුවේ පරිමාව $\frac{\pi}{4}(4\ln 2-1)$ බව පෙන්වන්න.

අවශ්‍ය පරිමාව $= \pi\int_0^{\ln 3} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^2}\,dx$ 5

$= \pi\int_2^4 \frac{u-1}{u^2}\,du$; මෙහි $u=1+e^x$. 5

$= \pi\int_2^4 \left\{\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right\} du$ 5

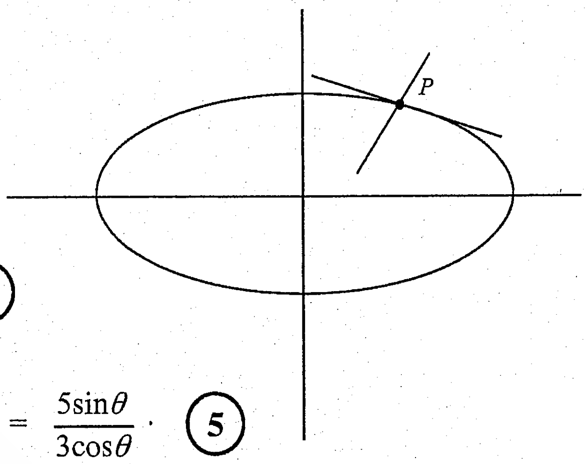
$= \pi\left\{\ln|u|+\frac{1}{u}\right\}\Big|_2^4$ 5

$= \pi\left\{\ln 4-\ln 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right\}$

$= \frac{\pi}{4}\{4\ln 2-1\}$ 5

7. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ ඉලිප්සයට එය මත $P \equiv (5\cos\theta,\ 3\sin\theta)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී වූ අභිලම්බ රේඛාවෙහි සමීකරණය $5\sin\theta\, x - 3\cos\theta\, y = 16\sin\theta\cos\theta$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත ඉලිප්සයට එය මත $\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි අභිලම්බ රේඛාවේ $y-$අන්තඃඛණ්ඩය සොයන්න.



$x = 5\cos\theta$, $y = 3\sin\theta$

$\dfrac{dx}{d\theta} = -5\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta$. 5

$\sin\theta \neq 0$ සඳහා $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \dfrac{3\cos\theta}{-5\sin\theta}$ 5

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා P හි දී ඇඳි අභිලම්බයේ අනුක්‍රමණය $= \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}$. 5

අවශ්‍ය සමීකරණය,

$\cos\theta \neq 0$ සඳහා $y - 3\sin\theta = \dfrac{5\sin\theta}{3\cos\theta}(x - 5\cos\theta)$ වේ. 5

$$5\sin\theta x - 3\cos\theta y = 16\sin\theta\cos\theta.$$

$\cos\theta = 0$ වන විට ද මෙම සමීකරණය වලංගු වේ. (P යන්න y – අක්ෂය මත පිහිටන විට)

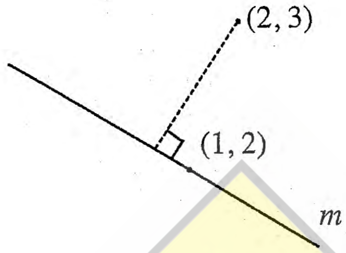
y – අන්තඃඛණ්ඩය සඳහා : $y = -\dfrac{16}{3}\sin\theta$.

නමුත්, $3\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore\ y = -\dfrac{8}{\sqrt{3}}$. 5

$\therefore$ අවශ්‍ය y – අන්තඃඛණ්ඩය $\left(0, -\dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)$ වේ.

8. $m \in \mathbb{R}$ හා l යනු $A \equiv (1,2)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන අනුක්‍රමණය m වූ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු.
l හි සමීකරණය m ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.
$B \equiv (2,3)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට l රේඛාවට ඇති ලම්බ දුර ඒකක $\frac{1}{\sqrt{5}}$ බව දී ඇත.
m හි අගයන් සොයන්න.



l හි සමීකරණය

$y - 2 = m(x-1)$ වේ. 5

එනම් $y - mx - 2 + m = 0$ වේ.

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|3 - 2m - 2 + m|}{\sqrt{1+m^2}}$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1-m)^2$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad 1 + m^2 = 5(1 - 2m + m^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad 4m^2 - 10m + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2m^2 - 5m + 2 = 0$$ 5

$$\Leftrightarrow \quad (2m-1)(m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad m = \frac{1}{2} \text{ or } m = 2.$$ 5

9. කේන්ද්‍රය $(-2, 0)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි තිබෙන හා $(-1, \sqrt{3})$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න. $A \equiv (1, -1)$ ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න. **ඒ නයින්**, A සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකයන්හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවල x–ඛණ්ඩාංක $5x^2 + 8x + 2 = 0$ සමීකරණය තෘප්ත කරන බව පෙන්වන්න.

$S : (x+2)^2 + y^2 = r^2$ (5)

මෙය $(-1, \sqrt{3})$ හරහා යයි.

$\therefore \; 1 + 3 = r^2.$

$\therefore \; 4 = r^2.$

ඒ නයින් S හි සමීකරණය $(x+2)^2 + y^2 = 4.$ (5)

එනම් $x^2 + y^2 + 4x = 0.$ ---------------- (1)

$A \equiv (1, -1)$ සිට S ට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යාය $x - y + 2(x+1) = 0$ වේ. (5)

එනම්, $3x - y + 2 = 0.$

ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය සඳහා $y = 3x + 2$, (1) හි ආදේශ කරමු. (5)

එවිට, $x^2 + (3x+2)^2 + 4x = 0.$

ඒ නයින්, $10x^2 + 12x + 4 + 4x = 0$ හා එබැවින් $5x^2 + 8x + 2 = 0$ වේ. (5)

10. $n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිතයෙන්, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ බව පෙන්වන්න.

$\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$ බව දී ඇත. $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $\cos\theta = \frac{24}{25}$ බව පෙන්වන්න.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 1

$\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ යන්න $\cos^2\theta \neq 0$ ලබා දෙයි.

ඒ නයින්, 1 න්, $1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ලැබේ. 5

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$. 5

දැන්, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ මගින්

$(\sec\theta - \tan\theta)(\sec\theta + \tan\theta) = 1$ ලබා දෙයි. 5

එබැවින් $\sec\theta + \tan\theta = \frac{4}{3}$, $\sec\theta - \tan\theta = \frac{3}{4}$. 5

$\therefore 2\sec\theta = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$.

$\therefore \cos\theta = \frac{24}{25}$. 5

11. (a) $f(x)=x^2+px+c$ හා $g(x)=2x^2+qx+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $p, q\in\mathbb{R}$ හා $c>0$ වේ. $f(x)=0$ හා $g(x)=0$ සඳහා α පොදු මූලයක් ඇති බව දී ඇත. $\alpha=p-q$ බව පෙන්වන්න.

p හා q ඇසුරෙන් c සොයා,

(i) $p>0$ නම් $p<q<2p$ බව,

(ii) $f(x)=0$ හි විවේචකය $(3p-2q)^2$ බව

අපෝහනය කරන්න.

β හා γ යනු පිළිවෙළින් $f(x)=0$ හි හා $g(x)=0$ හි අනික් මූල යැයි ගනිමු. $\beta=2\gamma$ බව පෙන්වන්න.

තව ද β හා γ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය $2x^2+3(2p-q)x+(2p-q)^2=0$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

(b) $h(x)=x^3+ax^2+bx+c$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b, c\in\mathbb{R}$ වේ. x^2-1 යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. $b=-1$ බව පෙන්වන්න.

$h(x)$ යන්න x^2-2x මගින් බෙදූ විට ශේෂය $5x+k$ බව ද දී ඇත; මෙහි $k\in\mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයා $h(x)$ යන්න $(x-\lambda)^2(x-\mu)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $\lambda, \mu\in\mathbb{R}$ වේ.

(a) α යනු $f(x)=0$ හා $g(x)=0$ හි පොදු මූලයක් බැවින්

$\alpha^2+p\alpha+c=0$ —— (1) හා 5 $2\alpha^2+q\alpha+c=0$ වේ. 5

$\therefore\ \alpha^2+(q-p)\alpha=0$ හා එබැවින් $\alpha[\alpha-(p-q)]=0$ වේ.

5

එනයින්, $\alpha=p-q$. 5 $(\because\ c>0\Rightarrow\alpha\neq 0)$

$\boxed{20}$

---

(1) $\Rightarrow c=-\alpha(\alpha+p)$ 5

$=-(p-q)(2p-q)$ 5 (α සඳහා ආදේශයෙන්

$=-(q-p)(q-2p)$.

$\boxed{10}$

(i) $c>0, \Rightarrow (q-p)(q-2p)<0$. 5

$\therefore$ p හා $2p$ අතර q පිහිටයි.

$p>0$ නම් $p<2p$ වන බැවින් $p<q<2p$ වේ. 5

$\boxed{10}$

(ii) $\Delta = p^2 - 4c.$ 5

$= p^2 + 4(q-p)\ (q-2p)$ 5

$= p^2 + 4[q^2 - 3pq + 2p^2]$

$= 9p^2 - 12pq + 4p^2$

$= (3p-2q)^2.$ 5

$\alpha + \beta = -p.$ 5

$\alpha + \gamma = -\dfrac{q}{2}.$ 5

$\therefore \beta - 2\gamma = -p - \alpha + q + 2\alpha$

$= -p + q + \alpha$

$= 0.$ 5 $(\because \alpha = p - q)$

$\therefore \beta = 2\gamma$

විකල්ප ක්‍රමයක්

$\alpha\beta = c$ 5

$\alpha r = \dfrac{c}{2}$ 5

එබැවින් $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$ වන බැවින්,

$\dfrac{\beta}{\gamma} = 2$ 5

$\beta = 2\gamma$

අවශ්‍ය සමීකරණය $(x-\beta)(x-\gamma) = 0$ වේ.

මෙය $x^2 - (\beta+\gamma)x + \gamma\beta = 0$ ලබා දෙයි. 10

තවද, $\beta + \gamma = -p - \dfrac{q}{2} - 2\alpha = -p - \dfrac{q}{2} - (2p-2q) = \dfrac{3}{2}(q-2p).$

5

දැන්, $\alpha^2\beta\gamma = \dfrac{c^2}{2}.$

$\therefore \beta\gamma = \dfrac{c^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{(q-p)^2(q-2p)^2}{2(p-q)^2} = \dfrac{1}{2}(q-2p)^2.$ 5

$x^2 - \dfrac{3}{2}(q-2p)x + \dfrac{1}{2}(q-2p)^2 = 0.$ 5

$2x^2 + 3(2p-q)x + (2p-q)^2 = 0.$

(b) (x^2-1) යන්න $h(x)$ හි සාධකයක් වන බැවින්,

$(x-1)$ හා $(x+1)$ යන දෙකම $h(x)$ හි සාධක වේ.

සාධක ප්‍රමේයය අනුව $h(1)=0$ හා $h(-1)=0$ වේ. 5

$h(x) = x^3 + ax^2 + bx + c.$

$\therefore h(1) = 1 + a + b + c = 0$ —— 1 හා $h(-1) = -1 + a - b + c = 0$ —— 2 වේ.

5 5

1 − 2 මගින් $2 + 2b = 0$ ලැබේ.

$\therefore \; b = -1.$ 5

$h(x) = p(x).(x^2-2x) + 5x + k$ 5

$h(0) = k.$ 5

$\therefore \; k = c.$

$h(2) = 8 + 4a + 2(-1) + c = 10 + k$ 5

$4a + c = 4 + k$

$a = 1$ 5

1 + 2, මගින් $a = -c$ ලැබේ.

$\therefore c = -1.$

එනයින්, $k = -1.$ 5

$h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$

$= (x+1)x^2 - (x+1)$

$= (x+1)(x^2-1)$ 5

$= (x+1)^2(x-1).$ 5

$(\lambda = -1 \;,\; \mu = 1.)$

12. (*a*) පියානෝ වාදකයින් පස්දෙනකු, ගිටාර් වාදකයින් පස්දෙනකු, ගායිකාවන් තුන්දෙනකු හා ගායකයින් හත්දෙනකු අතුරෙන් **හරියටම** පියානෝ වාදකයින් දෙදෙනකු ද **අඩු තරමින්** ගිටාර් වාදකයින් හතරදෙනකු ද ඇතුළත් වන පරිදි සාමාජිකයන් එකොළොස්දෙනකුගෙන් සමන්විත සංගීත කණ්ඩායමක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍යව ඇත. තෝරා ගත හැකි එවැනි වෙනස් සංගීත කණ්ඩායම් ගණන සොයන්න.

මේවා අතුරෙන් හරියටම ගායිකාවන් දෙදෙනකු සිටින සංගීත කණ්ඩායම් ගණන ද සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)}$ හා $V_r = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $A, B \in \mathbb{R}$ වේ.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = V_r - V_{r+1}$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r = \dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වා එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

දැන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $W_r = U_{r+1} - 2U_r$ යැයි ගනිමු. $\sum_{r=1}^{n} W_r = U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

12. (*a*) P = පියානෝ වාදකයින් (5), G = ගිටාර් වාදකයින් (5), ගායකයින් (10)

FS – ගායිකාවන් (3)

MS – ගායකයන් (7)

P	G	S	ආකාර ගණන
2	4	5	10 $\ {}^{5}C_{2}\ {}^{5}C_{4}\ {}^{10}C_{5} = 12600$ 5
2	5	4	10 $\ {}^{5}C_{2}\ {}^{5}C_{5}\ {}^{10}C_{4} = 2100$ 5

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 12600 + 2100$

$= 14700$ 5

P	G	FS	MS	ආකාර ගණන
2	4	2	3	10 ${}^{5}C_{2}\ {}^{5}C_{4}\ {}^{3}C_{2}\ {}^{7}C_{3} = 5250$ 5
2	5	2	2	10 ${}^{5}C_{2}\ {}^{5}C_{5}\ {}^{3}C_{2}\ {}^{7}C_{2} = 630$ 5

අවශ්‍ය ආකාර ගණන $= 5250 + 630$

$= 5880$ 5

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} \quad \text{හා} \quad V_r = \frac{A}{(r+1)} - \frac{B}{r}.$$

එබැවින්, $U_r = V_r - V_{r+1}$ මගින් $\dfrac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \dfrac{A}{r+1} - \dfrac{B}{r} - \dfrac{A}{r+2} + \dfrac{B}{r+1}$ ලැබේ. 5

$$\therefore \frac{3r-2}{r(r+1)(r+2)} = \frac{A}{(r+1)(r+2)} - \frac{B}{r(r+1)} \text{ හා}$$

ඒ නයින්, $3r-2 = Ar - B(r+2)$ $\quad r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

5

r හි බලවල සංගුණක සැසඳීමෙන්:

$$\left.\begin{array}{ll} r^1: & 3 = A - B \\ r^0: & -2 = -2B \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A = 4 \;\; 5 \\ B = 1 \;\; 5 \end{array}$$

$$U_r = V_r - V_{r+1}$$

$$r = 1; \quad U_1 = V_1 - \cancel{V_2}$$

$$r = 2; \quad U_2 = \cancel{V_2} - \cancel{V_3} \quad \Big\} \; 5$$

$$\vdots \qquad \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots \;\; \vdots$$

$$r = n-1; \quad U_{n-1} = \cancel{V_{n-1}} - \cancel{V_n}$$

$$r = n; \quad U_n = \cancel{V_n} - V_{n+1} \quad \Big\} \; 5$$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = V_1 - V_{n+1} \quad 5$$

$$= 1 - \left(\frac{4}{(n+2)} - \frac{1}{(n+1)} \right) \quad 5$$

$$= \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} . \quad 5$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{r=1}^{n} U_r = \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \right\} \quad 5$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ \frac{1}{(1 + \frac{1}{n}) \; (1 + \frac{2}{n})} \right\}$$

$$= 1. \quad 5$$

එමනිසා $\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය 1 වේ.

5

$$W_r = U_{r+1} - 2U_r$$

$$\sum_{r=1}^{n} W_r = \sum_{r=1}^{n} (U_{r+1} - 2U_r)$$

$$= \sum_{r=1}^{n} U_r - U_1 + U_{n+1} - 2 \sum_{r=1}^{n} U_r \quad 5$$

$$= U_{n+1} - U_1 - \sum_{r=1}^{n} U_r . \quad 5$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} W_r = \lim_{n\to\infty} U_{n+1} - U_1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} U_r$$

$$= 0 - \frac{1}{6} - 1 \quad 5$$

$$= -\frac{7}{6}.$$

$\therefore \sum_{r=1}^{\infty} W_r$ අභිසාරී වන අතර ඓක්‍යය $-\frac{7}{6}$ වේ. 5

13. (a) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a \in \mathbb{R}$ වේ.

$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} - \mathbf{I} = \mathbf{C}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\mathbf{I}$ යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසය වේ.

$\mathbf{C}^{-1}$ පවතින්නේ $a \neq 0$ **ම නම් පමණක්** බව ද පෙන්වන්න.

දැන්, $a = 1$ යැයි ගනිමු. $\mathbf{C}^{-1}$ ලියා දක්වන්න.

$\mathbf{CPC} = 2\mathbf{I} + \mathbf{C}$ වන පරිදි $\mathbf{P}$ න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z, w \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $|z|^2 = z\bar{z}$ බව පෙන්වා, එය $z - w$ ට යෙදීමෙන්

$|z-w|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w} + |w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|1-z\bar{w}|^2$ සඳහා ද එවැනි ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වා, $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = -\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$ බව පෙන්වන්න.

$|w| = 1$ හා $z \neq w$ නම් $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $1+\sqrt{3}i$ යන්න $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r > 0$ හා $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ වේ.

$(1+\sqrt{3}i)^m(1-\sqrt{3}i)^n = 2^8$ බව දී ඇත; මෙහි m හා n ධන නිඛිල වේ.

ද මුවාවර් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්, m හා n හි අගයන් නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබා ගන්න.

(a) $$A^TB = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix}_{3\times 2} \quad 5$$

$$= \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} \quad 5$$

$$\therefore\ A^TB - \mathrm{I} = \begin{bmatrix} a+1 & 1 \\ a & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 5$$

$$= \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & 2 \end{bmatrix} = C \quad 5$$

C^{-1} පවතී $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 5

$\Leftrightarrow 2a - a \neq 0$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ 5

$a = 1$ වන විට $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. 5

$\therefore \quad C^{-1} = \dfrac{1}{2-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. 5

$CPC = 2I + C$

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + C^{-1}C$ 5

$\Leftrightarrow PC = 2C^{-1} + I$

$\Leftrightarrow P = 2C^{-1}C^{-1} + C^{-1}$ 5

$\therefore \; P = 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 2 \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ 5

$= \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$ 5

(*b*) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු.

$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy)$ 5

$= x^2 - i^2 y^2$

$= x^2 + y^2$

$= |z|^2$

$\therefore \; |z|^2 = z\bar{z}$. 5

$$|z-w|^2 = (z-w)\,\overline{(z-w)} \qquad 5$$

$$= (z-w)\,(\bar{z}-\bar{w}) \qquad 5$$

$$= z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

$$= |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \qquad 5$$

$$= |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |w|^2 \longrightarrow 1$$

$$|1-\bar{z}w|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,(z\bar{w}) + |z\bar{w}|^2 \longrightarrow 2 \qquad 5$$

1 – 2 මගින්;

$$|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 1 - |z\bar{w}|^2 \text{ ලැබේ.} \qquad 5$$

$$= -\,(1 - |w|^2 - |z|^2 + |z|^2\,|w|^2) \qquad 5$$

$$= -\,(1-|z|^2)\,(1-|w|^2) \qquad 5 \longrightarrow 3$$

$|w| = 1$, බැවින් 3 න් $|z-w|^2 - |1-z\bar{w}|^2 = 0$ ලැබේ. 5

$\therefore\ |z-w| = |1-z\bar{w}|$.

ඒ නයින්, $\dfrac{|z-w|}{|1-z\bar{w}|} = 1.$ $\left[\begin{array}{l} \because z \neq w \\ \Rightarrow z\bar{w} \neq 1 \end{array}\right]$

$$\therefore \left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| = 1 \qquad 5$$

(c) $1 + \sqrt{3}\, i = 2\left\{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ 5

$= 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$ 5

$(1+\sqrt{3}\, i)^m (1-\sqrt{3}\, i)^n = 2^m\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^m 2^n\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)^n$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos\frac{m\pi}{3} + i\sin\frac{m\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{n\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{n\pi}{3}\right)\right)$ 5

$= 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right)$ 5

$\therefore 2^{m+n}\left(\cos(m-n)\frac{\pi}{3} + i\sin(m-n)\frac{\pi}{3}\right) = 2^8$

$\Rightarrow m+n=8$ හා $(m-n)\frac{\pi}{3} = 2k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}.$

5 5

14. (a) $x \neq 3$ සඳහා $f(x)=\dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x \neq 3$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

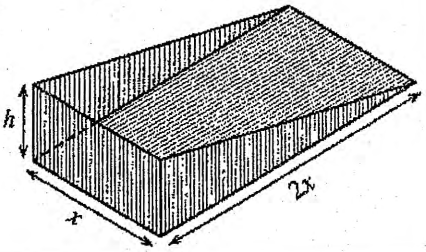
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x \neq 3$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{18x}{(x-3)^4}$ බව දී ඇත.

$y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) යාබද රූපයෙන් දූවිලි එකතු කරනයක මිට රහිත කොටස දැක්වේ. සෙන්ටිමීටරවලින් එහි මාන රූපයේ දැක්වේ. එහි පරිමාව x^2h cm^3 යන්න 4500 cm^3 බව දී ඇත. එහි පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය S cm^2 යන්න $S = 2x^2 + 3xh$ මගින් දෙනු ලැබේ. S අවම වන්නේ $x = 15$ වන විට බව පෙන්වන්න.



(a) $x \neq 3$; සඳහා $f(x) = \dfrac{x(2x-3)}{(x-3)^2}$

එවිට, $f'(x) = \dfrac{1}{(x-3)^2}\left[2x-3+2x\right] - \dfrac{2x(2x-3)}{(x-3)^3}$ 20

$= \dfrac{(x-3)(4x-3)-2x(2x-3)}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{4x^2-15x+9-4x^2+6x}{(x-3)^3}$

$= \dfrac{9(1-x)}{(x-3)^3}$. 5

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$ 5

	$-\infty < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	(−)	(+)	(−)
$f(x)$ is	↘ අඩුවේ.	↗ වැඩිවේ.	↘ අඩුවේ.
	5	5	5

$\therefore f(x)$ යන්න $[1, 3)$ මත වැඩි වන අතර $(-\infty, 1]$ හා $(3, \infty)$ මත අඩුවේ.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය : $\left(1, -\frac{1}{4}\right)$ අවමයක් වේ.

5

$x \neq 3$; සඳහා $f''(x) = \frac{18x}{(x-3)^4}$.

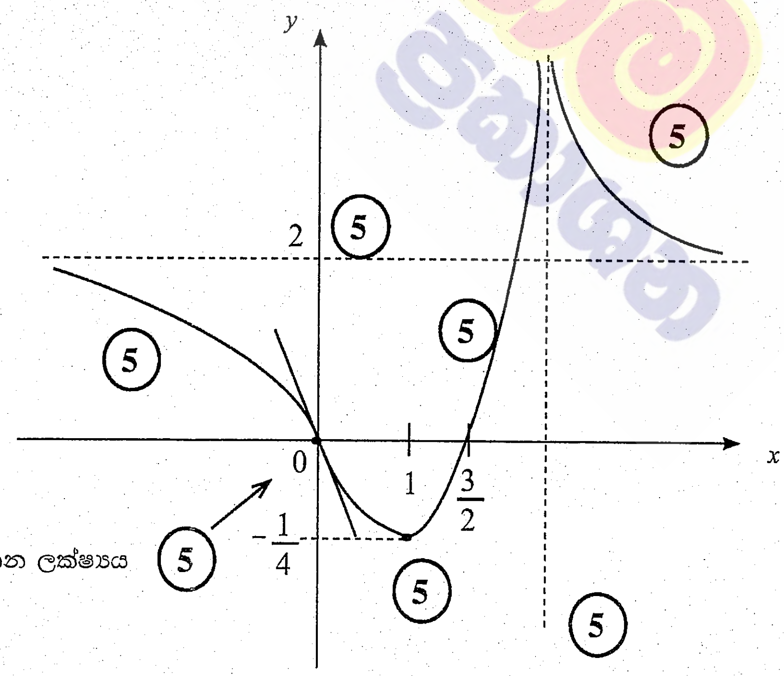
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ 5

	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 3$
$f''(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
අවතලභාවය	පහලට අවතල වේ. 5	ඉහලට අවතල වේ. 5

$\therefore$ නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය $= (0, 0).$ 5

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 2 \quad \therefore y = 2$ 5

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $x = 3.$ 5



නති වර්තන ලක්ෂ්‍යය 5

(*b*) $x^2 h = 4500.$

ඒ නයින්, $S = 2x^2 + 3xh$

$$= 2x^2 + 3x \cdot \frac{4500}{x^2} \quad ; \quad x > 0 \text{ සඳහා}$$

5

$$\therefore \frac{dS}{dx} = 4x - 3 \times 4500\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4(x^3 - 3375)}{x^2}.$$

5

$\frac{dS}{dx} = 0$ 10 $\Leftrightarrow x = 15.$ 5

$0 < x < 15$ සඳහා, $\frac{ds}{dr} < 0$ හා $x > 15$ සඳහා $\frac{ds}{dr} > 0.$ 5

$\therefore x = 15$ වන විට S අවම වේ. 5

15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව දී ඇත.

A හා B හි අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා,

$\displaystyle\int \frac{x^3+13x-16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $\displaystyle\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x\,dx$ අගයන්න.

(*c*) a නියතයක් වන $\displaystyle\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන්,

$\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \cos^6 x \sin^3 x\,dx$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\int_0^\pi x\cos^6 x \sin^3 x\,dx = \frac{2\pi}{63}$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$

$x^3 + 13x - 16 = A(x^2+9)(x+1) + B(x^2+9) + 2(x+1)^2$

x හි බලවල සංගුණක සැසඳූ විට ;

$x^3 : \; 1 = A.$ 5

$x^0 : \; -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow B = -3.$

5 5

විකල්ප ක්‍රමයක්:

ආදේශයෙන්

$x = -1 : \; -30 = 10B \Rightarrow B = -3$

$x = 0 : \; -16 = 9A + 9B + 2 \Rightarrow A$

$$\therefore \frac{x^2 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)} = \frac{1}{(x+1)} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{2}{x^2+9}.$$ 10

$$\int \frac{x^2 + 13x - 16}{(x+1)^2(x^2+9)}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx - 3\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+9}\,dx$$

$$= \ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$ 5

5 5 5

(b) $$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 e^x (1 - \cos 2\pi x) \, dx$$ 5

$$= \frac{1}{2} e^x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx}_{I}$$ 5

$$= \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2} I . \qquad \text{———} \; 1$$ 5

දැන්, $$I = \int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx$$

$$= \underbrace{e^x \frac{\sin 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1}_{} - \frac{1}{2\pi}\int_0^1 e^x \sin 2\pi x \, dx$$ 5 5

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left[\left(-e^x \frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_0^1 e^x \cos 2\pi x \, dx}_{I}\right]$$ 5 5

$$= \frac{1}{4\pi^2}\left[e - 1\right] - \frac{1}{4\pi^2} I .$$ 5 5

$$\therefore I \left(1 + \frac{1}{4\pi^2}\right) = \frac{1}{4\pi^2}(e-1).$$

$$\therefore I = \frac{(e-1)}{4\pi^2 + 1} .$$ 5

$\therefore$ 1 න්, $$\int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx = \frac{1}{2}(e-1) - \frac{1}{2}\frac{(e-1)}{(4\pi^2+1)}$$ 5 + 5

$$= \frac{(e-1)}{2}\left[\frac{4\pi^2}{4\pi^2+1}\right]$$

$$= \frac{2(e-1)\pi^2}{1 + 4\pi^2} .$$

(c) $$I = \int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx$$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \underbrace{\cos^6(\pi - x)}_{\cos^6 x} \underbrace{\sin^3(\pi - x)}_{\sin^3 x} \, dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos^6 x \sin^3 x \quad 5$$

5

$$= \pi \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx - \underbrace{\int_0^{\pi} x\cos^6 x \sin^3 x \, dx}_{I} \, . \quad 5$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx \, . \quad 5$$

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^3 x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x \sin^2 x \sin x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^6 x (1 - \cos^2 x) \sin x \, dx \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\int_0^{\pi} \cos^6 x \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \cos^8 x \sin x \, dx \right] \quad 5$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[\left. \frac{-\cos^7 x}{7} \right|_0^{\pi} + \left. \frac{\cos^9 x}{9} \right|_0^{\pi} \right]$$

5 5

$$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{7} - \frac{2}{9} \right] \quad 5$$

$$= \frac{2\pi}{63} \, .$$

16. $A \equiv (1, 2)$ හා $B \equiv (3, 3)$ යැයි ගනිමු.

A හා B ලක්ෂ්‍ය හරහා යන l සරල රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

එක එකක් l සමග $\dfrac{\pi}{4}$ ක සුළු කෝණයක් සාදමින් A හරහා යන l_1 හා l_2 සරල රේඛා

l මත ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක ඛණ්ඩාංක $(1 + 2t, 2 + t)$ ආකාරයෙන් ලිවිය හැකි බව පෙ

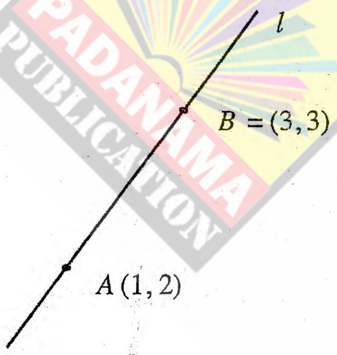
l_1 හා l_2 යන දෙකම ස්පර්ශ කරන හා කේන්ද්‍රය l මත වූ මූලමතින්ම පළමුවන

අරය $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ වන, C_1 වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \dfrac{31}{2} = 0$ බව ද පෙන්

විෂ්කම්භයක අන්ත A හා B වූ C_2 වෘත්තයේ සමීකරණය ලියා දක්වන්න.

C_1 හා C_2 වෘත්ත ප්‍රලම්බව ඡේදනය වේ දැයි නිර්ණය කරන්න.

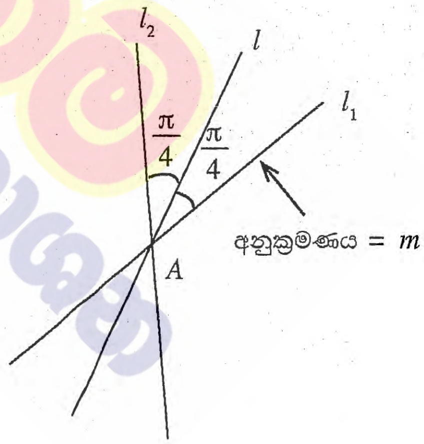
(16)



අනුක්‍රමණය $= \dfrac{3-2}{3-1} = \dfrac{1}{2}$. (5)

l හි සමීකරණය : $y - 2 = \dfrac{1}{2}(x - 1)$. (5)

මෙය $x - 2y + 3 = 0$ වේ.



$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m}\right| \quad (10)$$

$$\therefore \quad 1 = \left|\frac{2m - 1}{2 + m}\right| \quad (5)$$

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = \pm(2m - 1)$ (5)

$\Leftrightarrow \quad 2 + m = 2m - 1$ හෝ $2 + m = -2m + 1$

$\Leftrightarrow \quad m = 3$ හෝ $m = -\dfrac{1}{3}$.

(5) (5)

$l_1 : \ y - 2 = 3(x - 1)$ හා $l_2 : y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 1).$

$l_1 : \ 3x - y - 1 = 0$ හා $l_2 : \ x + 3y - 7 = 0.$

5 5

$l : \ \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = t$ (යැයි ගනිමු). 5

එවිට, $x = 1 + 2t, \ y = 2 + t,$ මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

C_1 සඳහා

$P \equiv (1 + 2t, 2 + t)$ සිට l_1 ට ලම්බ දුර C_1 හි අරයට සමාන වේ.

එනම්, $\frac{|3(1 + 2t) - (2 + t) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$ 10 5

එනම්, $|3 + 6t - 2 - t - 1| = 5.$ 5

$|5t| = 5.$

$t = \pm 1$ 5

$P \equiv (3, 3) = B$, බැවින් $P \equiv (-1, 1)$ සුදුසු නොවේ.

5 5

$C_1 : \ (x - 3)^2 + (y - 3)^2 = \frac{5}{2}.$ 5

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 18 = \frac{5}{2}$

එනම්, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + \frac{31}{2} = 0$ 5

C_2 හි සමීකරණය

$(x - 1)(x - 3) + (y - 2)(y - 3) = 0.$ 15

කේන්ද්‍රය 5, අරය 5, සමීකරණය 5

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = 2(-3)(-2) + 2(-3)\left(-\frac{5}{2}\right) = 27. \quad (5)$$

$(5) \qquad (5)$

$$c_1 + c_2 = \frac{31}{2} + 9 = \frac{49}{2}. \quad (5)$$

$$\therefore\ 2g_1g_2 + 2f_1f_2 \neq c_1 + c_2. \quad (5)$$

$\therefore$ C_1 හා C_2 ප්‍රලම්භ ඡේදනය නොවේ. (5)

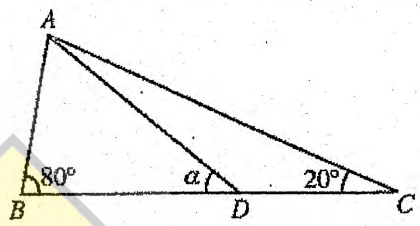
17. (*a*) $\sin A, \cos A, \sin B$ හා $\cos B$ ඇසුරෙන් $\sin(A-B)$ ලියා දක්වන්න.

(i) $\sin(90°-\theta) = \cos\theta$, හා

(ii) $2\sin 10° = \cos 20° - \sqrt{3}\,\sin 20°$

බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.



රූපයේ දක්වා ඇති ABC ත්‍රිකෝණයේ $A\hat{B}C = 80°$ හා $A\hat{C}B = 20°$ වේ. D ලක්ෂ්‍යය BC මත පිහිටා ඇත්තේ $AB = DC$ වන පරිදි ය. $A\hat{D}B = \alpha$ යැයි ගනිමු.

සුදුසු ත්‍රිකෝණ සඳහා **සයින් නීතිය** භාවිතයෙන්, $\sin 80° \sin(\alpha - 20°) = \sin 20° \sin\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin 80° = \cos 10°$ වන්නේ ඇයිදැයි පැහැදිලි කර, **ඒ නයින්**, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20°}{\cos 20° - 2\sin 10°}$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත (*a*)(ii) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $\alpha = 30°$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*c*) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$ සමීකරණය විසඳන්න.

(*a*) $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$. 10

(i) $\sin(90° - \theta) = \sin 90°\cos\theta - \cos 90°\sin\theta$ 5

$= \cos\theta$. 5 $\quad$ ($\because \sin 90° = 1$ හා $\cos 90° = 0$.)

(ii) $2\sin 10° = 2\sin(30° - 20°)$ 5

$= 2\sin 30°\cos 20° - 2\cos 30°\sin 20°$ 5

$= \cos 20° - \sqrt{3}\,\sin 20°$. 5 $\quad$ ($\because \sin 30° = \dfrac{1}{2}$ හා $\cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$)

(b) $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$, 5 + 5

මෙහි $BC = a. CA = b$ හා $AB = c$.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

ABD ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{AB}{\sin\alpha} = \dfrac{AD}{\sin 80^\circ}$. 10

ADC ත්‍රිකෝණය සඳහා ; $\dfrac{DC}{\sin(\alpha - 20^\circ)} = \dfrac{AD}{\sin 20^\circ}$. 10

$\therefore \dfrac{\sin(\alpha - 20^\circ)}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$.

$\therefore \sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$. 5

$\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$ 5 5

දැන්, $\sin 80^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = \sin 20^\circ \sin\alpha$ මගින්,

$\cos 10^\circ \sin(\alpha - 20^\circ) = 2\sin 10^\circ \cos 10^\circ \sin\alpha$ දෙනු ලැබේ. 5 5

$\therefore \sin\alpha \cos 20^\circ - \cos\alpha \sin 20^\circ = 2\sin 10^\circ \sin\alpha$. 5

$\therefore \tan\alpha(\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ) = \sin 20^\circ$ 5 හා ඒ නයින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ - 2\sin 10^\circ}$. 5

(a)(ii) මගින්, $\tan\alpha = \dfrac{\sin 20^\circ}{\sqrt{3}\ \sin 20^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ලැබේ. 5

$\therefore\ \alpha = 30^\circ$. 5 $(20^\circ < \alpha < 90^\circ)$

(c) $\tan^{-1}(\cos^2 x) + \tan^{-1}(\sin x) = \dfrac{\pi}{4}$.

$\alpha = \tan^{-1}(\cos^2 x)$ හා $\beta = \tan^{-1}(\sin x)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $\alpha = \dfrac{\pi}{4} - \beta$.

$\therefore\ \tan\alpha = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \beta\right)$ 5

$= \dfrac{\tan\dfrac{\pi}{4} - \tan\beta}{1 + \tan\dfrac{\pi}{4}\ \tan\beta}$. 5

$\Rightarrow \cos^2 x = \dfrac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$. 5

$\cos^2 x\ (1 + \sin x) = (1 - \sin x)$

$(1 - \sin^2 x)(1 + \sin x) = (1 - \sin x)$ 5

$(1 - \sin x)(1 + \sin x)^2 = 1 - \sin x$

$\Rightarrow\ \sin x = 1$ හෝ $1 + \sin x = \pm 1$

$\Rightarrow\ \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$n \in \mathbb{Z}$ සඳහා $\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n \dfrac{\pi}{2}$ 5 හෝ $m \in \mathbb{Z}$ සඳහා $x = m\pi$ 5

විකල්ප ක්‍රමයක් :

$\tan(\alpha + \beta) = \tan\frac{\pi}{4}$ 5

$\therefore \quad \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = 1$ 5

$\therefore \cos^2 x + \sin x = 1 - \cos^2 x \sin x$ 5

$1 - \sin^2 x + \sin x = 1 - (1 - \sin^2 x)\sin x$

$\sin x(1 - \sin x)(2 + \sin x) = 0$ 5

$\Rightarrow \sin x = 1$ හෝ $\sin x = 0$ 5 $(\because \sin x \neq -2)$

$\Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}$ 5 හෝ $x = m\pi\,;\, m \in \mathbb{Z}$. 5

$\boxed{35}$

උසස් පෙළ සඳහා ග්‍රන්ථ නාමාවලිය

(අ.පො.ස) උසස් පෙළ
12-13 ශ්‍රේණි - කෙටි සටහන්

සිංහල මාධ්‍ය

විද්‍යා - ගණිත

- [ ] 12 සාමාන්‍ය තොරතුරු තාක්ෂණය
- [ ] 12-13 රසායන විද්‍යාව - 1
- [ ] 12-13 රසායන විද්‍යාව - 2
- [ ] 12-13 රසායන විද්‍යාව - 3
- [ ] 12-13 රසායන විද්‍යාව - 4
- [ ] 12-13 රසායන විද්‍යාව - 5
- [ ] 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 1
- [ ] 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 2
- [ ] 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 3
- [ ] 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 4
- [ ] 12-13 භෞතික විද්‍යාව - 5
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 1
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 2
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 3
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 4
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 5
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 6 (ක්‍රියාකාරී මානවයා)
- [ ] 12-13 ජීව විද්‍යාව - 7 (ක්‍රියාකාරී ශාකය)
- [ ] 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 1
- [ ] 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 2
- [ ] 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 3
- [ ] 12-13 කෘෂි විද්‍යාව - 4

වාණිජ්‍යය

- [ ] 12 ගිණුම්කරණය
- [ ] 13 ගිණුම්කරණය
- [ ] 12 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- [ ] 13 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- [ ] 12 ආර්ථික විද්‍යාව
- [ ] 13 ආර්ථික විද්‍යාව - 1
- [ ] 13 ආර්ථික විද්‍යාව - 2

කලා

- [ ] 12 සිංහල
- [ ] 13 සිංහල
- [ ] 12 දේශපාලන විද්‍යාව
- [ ] 13 දේශපාලන විද්‍යාව
- [ ] 12 ශ්‍රී ලංකා ඉතිහාසය
- [ ] 13 ශ්‍රී ලංකා ඉතිහාසය
- [ ] 12 ඉන්දියානු ඉතිහාසය
- [ ] 13 ඉන්දියානු ඉතිහාසය
- [ ] 12 භූගෝල විද්‍යාව
- [ ] 13 භූගෝල විද්‍යාව
- [ ] 12 බෞද්ධ ශිෂ්ටාචාරය
- [ ] 13 බෞද්ධ ශිෂ්ටාචාරය
- [ ] 12 සන්නිවේදන හා මාධ්‍ය අධ්‍යයනය
- [ ] 13 සන්නිවේදන හා මාධ්‍ය අධ්‍යයනය

Grade 12-13 - Short Notes

English Medium

- [ ] 12 Accounting
- [ ] 13 Accounting
- [ ] 12 Business Studies
- [ ] 13 Business Studies
- [ ] 12 Economics

12-13 ශ්‍රේණි - ප්‍රශ්නෝත්තර

සිංහල මාධ්‍ය

- [ ] සාමාන්‍ය දැනීම
- [ ] 12 ගිණුම්කරණය - 1
- [ ] 12 ව්‍යාපාර අධ්‍යයනය
- [ ] 12 ආර්ථික විද්‍යාව

සියලු ම ශ්‍රේණි සඳහා කෙටි සටහන් සහ ප්‍රශ්න පත්‍ර පොත් අප සතුව තිබෙන අතර, මෙම ඕනෑම ග්‍රන්ථයක් වට්ටම් සහිත ව ඔබේ නිවසට ම ගෙන්වා ගත හැකි ය.